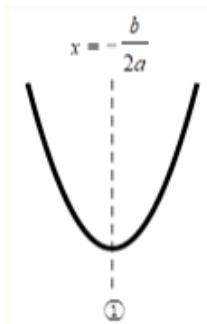
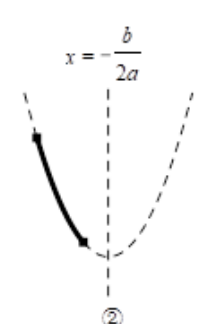
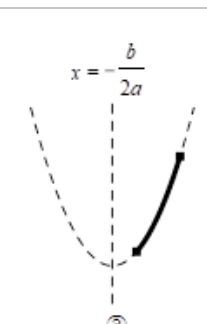
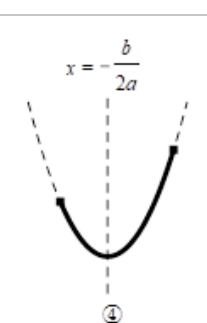


第3讲二次函数与区间最值

对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a > 0)$ ($y_{\max}$ 表示 y 的最大值, $y_{\min}$ 表示 y 的最小值)

图象	自变量取值范围	最小值	最大值
	全体实数	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 取到最值.	无
	$m \leq x \leq n < -\frac{b}{2a}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\max}$
	$-\frac{b}{2a} < m \leq x \leq n$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\max}$
	$m \leq x \leq n$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\min}$	当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = y_{\max}$

一、定轴定区间

1. 求二次函数区间内最值

典题精练1

1. 求函数 $y = 2x^2 - x + 1$ 在给定区间内的最大值和最小值 .
 - (1) 若 $1 \leq x \leq 2$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值 .
 - (2) 若 $0 \leq x \leq 1$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值 .
 - (3) 若 $-2 \leq x \leq 0$, 求 $y = 2x^2 - x + 1$ 的最大值、最小值 .

典题精练2

2. 已知点 $A(t, 1)$ 为函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b 为常数, 且 $a \neq 0$) 与 $y = x$ 图象的交点 .
 - (1) 求 t .
 - (2) 若函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的图象与 x 轴只有一个交点, 求 a, b .
 - (3) 若 $1 \leq a \leq 2$, 设当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 时, 函 $y = ax^2 + bx + 4$ 的最大值为 m , 最小值为 n , 求 $m - n$ 的最小值 .

3. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A 在抛物线 $y = x^2 + bx + c (b > 0)$ 上, 且 $A(1, -1)$.
- (1) 若 $b - c = 4$, 求 b, c 的值.
 - (2) 若该抛物线与 y 轴交于点 B , 其对称轴与 x 轴交于点 C , 试求出 OB, OC 的数量关系.
 - (3) 将该抛物线平移, 平移后的抛物线仍经过 $(1, -1)$, 点 A 的对应点 $A_1(1 - m, 2b - 1)$, 当 $m \geq -\frac{3}{2}$ 时, 求平移后抛物线的顶点所能达到的最高点的坐标.

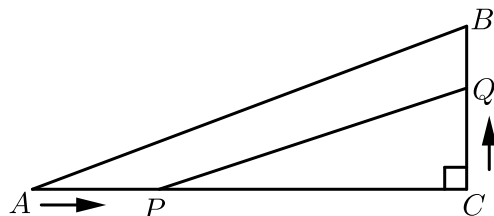
 经典再现

4. 已知抛物线 $y = x^2 + bx - 3$ (b 是常数) 经过点 $A(-1, 0)$.
- (1) 求该抛物线的解析式和顶点坐标.
 - (2) $P(m, t)$ 为抛物线上的一个动点, P 关于原点的对称点为 P' .
 - ① 点 P' 落在该抛物线上时, 求 m 的值.
 - ② 当点 P' 落在第二象限内, $P'A^2$ 取得最小值时, 求 m 的值.

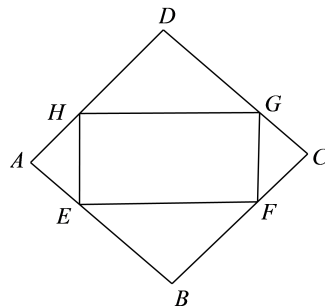
2. 动点产生的函数最值

典题精练

5. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6\text{cm}$ ， $BC = 2\text{cm}$ ，点 P 在边 AC 上，从点 A 向点 C 移动，点 Q 在边 CB 上，从点 C 向点 B 移动．若点 P ， Q 均以 1cm/s 的速度同时出发，且当一点移动到终点时，另一点也随之停止，连接 PQ ，则线段 PQ 的最小值是（ ）．



- A. 20cm B. 18cm C. $2\sqrt{5}\text{cm}$ D. $3\sqrt{2}\text{cm}$
6. 如图，点 E 、 F 、 G 、 H 分别在菱形 $ABCD$ 的四条边上， $BE = BF = DG = DH$ ，连接 EF ， FG ， GH ， HE ，得到四边形 $EFGH$ ，若 $AB = a$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，当四边形 $EFGH$ 的面积取得最大时， BE 的长度为（ ）．



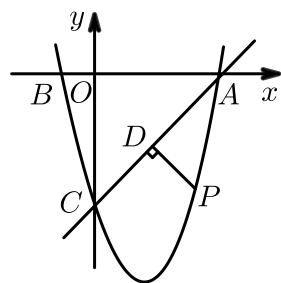
- A. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

3. 二次函数中的线段最值

典题精练

7. 已知抛物线 $y = -mx^2 + 2mx + 3m (m > 0)$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点（点 B 在 A 的右侧），与 y 轴交于点 C ， D 是抛物线的顶点．
- （1）当 $m = 1$ 时，求顶点 D 的坐标．
- （2）若 $OD = OB$ ，求 m 的值．
- （3）若 E 为 A 、 B 两点间抛物线上的一个动点（含端点 A 、 B ），过点 E 作 $EH \perp x$ 轴，垂足为 H ，交直线 BC 于点 F ，设线段 EF 的长为 t ，若 t 的最大值为 $\frac{9}{2}$ ，求 m 的值．

8. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 B 的坐标为 $(-1, 0)$ ，且 $OA = OC = 4OB$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过 A, B, C 三点。

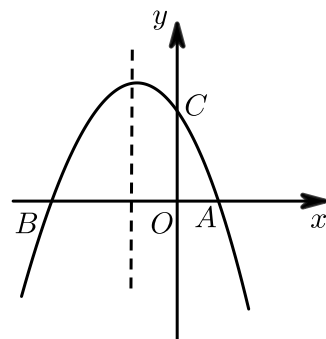


- (1) 求 A, C 两点的坐标。
- (2) 求抛物线的解析式。
- (3) 若点 P 是直线 AC 下方的抛物线上的一个动点，作 $PD \perp AC$ 于点 D ，当 PD 的值最大时，求此时点 P 的坐标及 PD 的最大值。

4. 二次函数中的面积最值

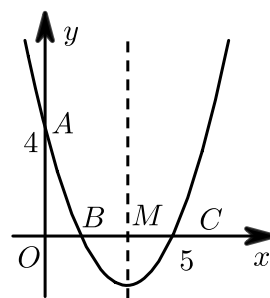
典题精练

9. 如图，抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C 。



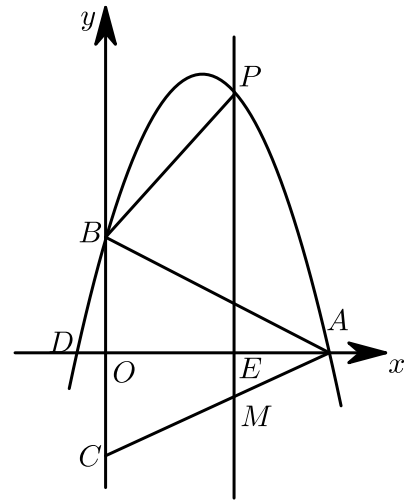
- (1) 求 A 、 B 、 C 三点的坐标。
- (2) 抛物线上在第二象限内是否存在一点 Q ，使 $\triangle QBC$ 的面积最大？若存在，求出点 Q 的坐标及 $\triangle QBC$ 的面积最大值；若不存在，请说明理由。

10. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线经过点 $A(0,4)$ ， $B(1,0)$ ， $C(5,0)$ ，其对称轴与 x 轴交于点 M



- (1) 求此抛物线的解析式和对称轴 .
- (2) 连接 AC ，在直线 AC 下方的抛物线上，是否存在一点 N ，使 $\triangle NAC$ 的面积最大？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由 .

11. 如图，已知直角坐标系中， A 、 B 、 D 三点的坐标分别为 $A(8,0)$ ， $B(0,4)$ ， $D(-1,0)$ ，点 C 与点 B 关于 x 轴对称，连接 AB 、 AC 。



- (1) 求过 A 、 B 、 D 三点的抛物线的解析式。
- (2) 有一动点 E 从原点 O 出发，以每秒2个单位的速度向右运动，过点 E 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 P ，交线段 CA 于点 M ，连接 PA 、 PB ，设点 E 运动的时间为 $t(0 < t < 4)$ 秒，求四边形 $PBCA$ 的面积 S 与 t 的函数关系式，并求出四边形 $PBCA$ 的最大面积。

二、定轴动区间

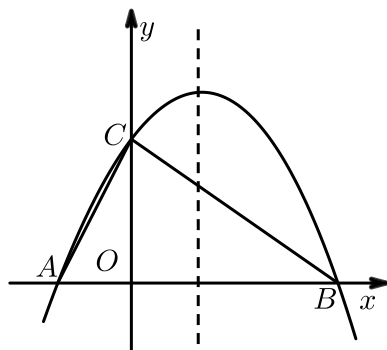
典题精练1

12. 已知抛物线 $C: y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 且关于直线 $x = 1$ 对称, 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.

(1) 求抛物线 C 的解析式和顶点坐标.

(2) 当 $a \leq x \leq a + 1$ 时, 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的最小值为 $2a$, 求 a 的值.

13. 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 、点 B , 与 y 轴交于点 C , 抛物线的对称轴是直线 $x = 1$, 连接 BC 、 AC .



(1) 求 $S_{\triangle ABC}$ (用含有 a 的代数式来表示).

(2) 若 $S_{\triangle ABC} = 6$, 求抛物线的解析式.

(3) 在 (2) 的条件下, 当 $-1 \leq x \leq m + 1$ 时, y 的最大值是 2, 求 m 的值.

典题精练2

14. 二次函数 $y = -(x-1)^2 + 5$, 当 $m \leq x \leq n$ 且 $mn < 0$, y 的最小值为 $2m$, 最大值为 $2n$, 则 $m+n$ 的值为 ().
- A. $\frac{5}{2}$ B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
15. 已知函数 $y = x^2 + x - 1$, 当 $m \leq x \leq m+2$ 时, $-\frac{5}{4} \leq y \leq 1$, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $m \geq -2$ B. $-2 \leq m \leq -1$ C. $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ D. $m \leq -1$

三、动轴定区间

典题精练

16. 已知函数 $y = x^2 + kx + 2$, 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, 此函数有最小值 -4 , 求实数 k 的值.

17. 二次函数 $y = -x^2 + 2kx - 4$ 在 $-1 \leq x \leq 2$ 时, $y \leq 0$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围为 ____.

经典再现

18. 已知二次函数 $y = (x-h)^2 + 1$ (h 为常数), 在自变量 x 的值满足 $1 \leq x \leq 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 5 , 则 h 的值为 ().
- A. 1或-5 B. -1或5 C. 1或-3 D. 1或3

四、动轴动区间

典题精练

19. 设 $a < -1$, $0 \leq x \leq -a-1$, 且函数 $y = x^2 + ax$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$, 则常数 $a =$ ____.

 经典再现

20. 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) .

(1) 当 $b = 2, c = -3$ 时, 求二次函数的最小值 .

(2) 当 $c = 5$ 时, 若在函数值 $y = 1$ 的情况下, 只有一个自变量 x 的值与其对应, 求此时二次函数的解析式 .

(3) 当 $c = b^2$ 时, 若在自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b + 3$ 的情况下, 与其对应的函数值 y 的最小值为 21, 求此时二次函数的解析式 .